MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1994
ENTPE. ENSG. ENTM. ENSTIMD

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 2 heures

(2 pages)

N.B : *A condition d'admettre le résultat de la question A.2 , les deux parties du problème sont indépendantes.*

Partie A

a, b, c, d sont des nombres réels tels que $0 < a \leq b$, $\quad 0 < c \leq d$, $\quad$ et $a-b < c-d$.

Soit $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbf{N}$ $\quad \dfrac{u_{n-1}}{u_n} = \dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$

Question 1

A.1 Soient $\gamma \in \mathbf{R}$, $v_n = \ln(n^\gamma u_n)$ et $w_n = v_{n-1} - v_n$, pour n $\in \mathbf{N}^*$.

Déterminer le développement limité de w_n à l'ordre 2 selon les puissances de $\dfrac{1}{n}$ lorsque $n \to \infty$

Comment choisir γ pour que la série $\sum w_n$ soit convergente ?

A.2 Montrer qu' alors u_n est équivalent à $\dfrac{L}{n^{c-d-a-b}}$ quand $n \to +\infty$, L étant une constante strictement positive que l'on n'explicitera pas. A quelle condition nécessaire et suffisante la série numérique $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Question 2

A.3 Déterminer le développement en série entière de $f(x)$ = Arcsin(x) au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence que l'on notera R_f. On donnera le terme général en utilisant des factorielles.

A.4 Etudier la convergence de la série précédente pour $x = R_f$ et expliciter la somme de cette série.
(On pourra qualifier la nature de la convergence, sur $[-R_f, R_f]$, de la série entière obtenue à la question A.3)

Partie B

On garde les notations de la partie précédente et on suppose de plus $a = c$;

ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+b}{n+d}$ pour $n \in \mathbf{N}$ (on a donc ici $d \neq b$ et encore $u_0 > 0$)

Question 1

B.1 En utilisant les résultats de la partie A, donner une condition nécessaire et suffisante sur b et d pour que la série numérique $\sum u_n$ converge et déterminer sous cette hypothèse la limite de $n\,u_n$ quand $n \to +\infty$

B.2 On suppose la condition précédente réalisée. Soit $z_n = (n-1)u_{n-1} - nu_n$

Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$. En utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$,

déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de b, d et u_0.

Question 2

B.3 Soit la série entière $\sum u_n x^n$. Donner son rayon de convergence R_h. Pour $x \in \left]-R_h, R_h\right[$ on

notera sa somme $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

B.4 En utilisant $(1-x)h'(x)$ montrer que h est solution sur $\left]-R_h, R_h\right[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

B.5 En déduire $h(x)$ pour $x \in \left]-R_h, R_h\right[$, lorsque $d = 1$.

B.6 Déterminer le rayon de convergence R', et la somme sur $\left]-R', R'\right[$, de

la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n x^n$ lorsque $u'_n = \dfrac{1}{4^n} C_{2n}^{n}$

Question 3

$\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^{n+1}}$ pour $n \in \mathbf{N}$

B.7 Etablir une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n

B.8 Etudier la nature des séries $\sum \mathrm{I}_n$ et $\sum(-1)^n \mathrm{I}_n$. Déterminer l'intervalle de convergence de $\sum(-1)^n \mathrm{I}_n . x^n$, x étant une variable réelle.

B.9 Calculer I_0 .

B.10 Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{I}_n$ en fonction de I_0 (On pourra étudier $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{I}_k$)